

ĐỀ TOÁN KHÔNG CHUYÊN TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
NĂM HỌC 2014 – 2015

Thời gian: 120 phút

Bài 1. (2 điểm)

a) Giải phương trình $(3-x)\sqrt{(3+x)(9+x^2)} = 4\sqrt{5(3-x)}$

b) Tính $\frac{x}{y}$ biết $x > 1, y < 0$ và $\frac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{(1-\sqrt{4x-1})^2}}{(1-\sqrt{4x-1})(x^2y^2+xy^3+y^4)} = -6$

Bài 2. (2 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 - y + 2)(\sqrt{(x^2 + 9)(y + 7)} - 15) = 0 \\ \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y + 7} = 8 \end{cases}$$

b) Hình thoi ABCD có diện tích là $18\sqrt{3}$ (mét vuông), tam giác ABD đều. Tính chu vi hình thoi và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3. (2 điểm) Cho phương trình $\frac{mx^2 + (m-3)x + 2m-1}{x+3} = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

$$21x_1 + 7m(2 + x_2 + x_2^2) = 58$$

Bài 4. (1 điểm)

a) Gọi $x = \frac{a+b}{2}, y = \sqrt{ab}$ lần lượt là trung bình cộng và trung bình nhân của hai số

dương a, b . Biết trung bình cộng của x và y bằng 100. Tính $S = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) Giả sử hai đại lượng x, y tỉ lệ nghịch (x, y luôn dương). Nếu x tăng $a\%$ thì y giảm $m\%$. Tính m theo a .

Bài 5. (3 điểm). Hình vuông ABCD có $AB = 2a$, AC cắt BD tại I. Gọi T là đường tròn ngoại tiếp tam giác CID, BE tiếp xúc với T tại E (E khác C), DE cắt AB tại F.

a) Chứng minh tam giác ABE cân. Tính AF theo a .

b) BE cắt AD tại P. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP tiếp xúc với CD. Tính $\frac{AP}{PD}$

c) AE cắt T tại M (M khác E). Tính AM theo a .

Hết

Hướng dẫn giải

Bài 1.

$$\text{a) } (3-x)\sqrt{(3+x)(9+x^2)} = 4\sqrt{5(3-x)}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ (x+3)(x^2+9) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Với điều kiện trên ta có:

$$\begin{aligned} (3-x)\sqrt{(3+x)(9+x^2)} &= 4\sqrt{5(3-x)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3-x} \left(\sqrt{3-x} \sqrt{(3+x)(x^2+9)} - 4\sqrt{5} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3-x} \left(\sqrt{81-x^4} - 4\sqrt{5} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x} = 0 \\ \sqrt{81-x^4} = 4\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{3, -1, 1\}$$

b)

$$\text{Ta có } x > 1, \Rightarrow \sqrt{4x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{(1-\sqrt{4x-1})^2} = \sqrt{4x-1} - 1$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{(1-\sqrt{4x-1})^2}}{(1-\sqrt{4x-1})(x^2y^2+xy^3+y^4)} &= -6 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y^2(x^2+xy+y^2)} &= 6 \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 6y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = 7 \Rightarrow \frac{x}{y} = -\sqrt{7} \quad (\text{do } x > 1, y < 0) \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\text{a) } \begin{cases} (x^2 - y + 2) \left(\sqrt{(x^2 + 9)(y + 7)} - 15 \right) = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y + 7} = 8 & (2) \end{cases} \quad (\text{điều kiện } y \geq -7)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y - 2 \\ \sqrt{(x^2 + 9)(y + 7)} = 15 \end{cases}$$

$$\text{Với } x^2 = y - 2 \text{ thế vào (2) ta có: } 2\sqrt{y+7} = 8 \Leftrightarrow y = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$$

Ta có nghiệm $(x;y)$ là $(\sqrt{7};9),(-\sqrt{7};9)$

Với $\sqrt{(x^2+9)(y+7)}=15$, đặt $u=\sqrt{x^2+9}, v=\sqrt{y+7} (u,v \geq 0)$ ta có hệ

$$\begin{cases} uv=15 \\ u+v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=5 \\ u=5 \\ v=3 \end{cases}$$

Với $u=3$, ta có $x=0, v=5$ ta có $y=18$. Ta có nghiệm $(0;18)$

Với $u=5$, ta có $x=4$ hoặc $x=-4, v=3$ ta có $y=2$. Ta có nghiệm $(x;y)$ là $(4;2)$ và $(-4;2)$.

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm $(\sqrt{7};9),(-\sqrt{7};9),(0;18),(4;2),(-4;2)$

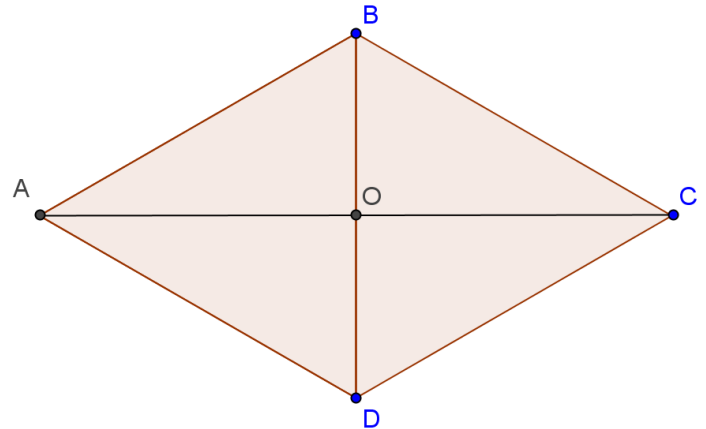
- b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Gọi a là cạnh hình thoi. Tam giác ABD đều nên $BD=AB=a, \angle ABD=60^\circ$.

$$AO=AB \cdot \sin ABD=AB \sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC=2AO=a\sqrt{3} \text{ ta có}$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC \cdot BD=18\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot a=18\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

khi đó chu vi hình thoi là $4a$.

Hơn nữa $DA=DB=DC=a$ nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính bằng a .



Bài 3.

- a) khi $m=-1$ ta có phương trình:

$$\frac{-x^2-4x-3}{x+3}=0 \text{ (dk } x \neq -3)$$

$$\Leftrightarrow -x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1(n) \\ x=-3(l) \end{cases}$$

$$S=\{-1\}$$

- b) $\frac{mx^2+(m-3)x+2m-1}{x+3}=0 \quad (1)$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là phương trình

$$mx^2+(m-3)x+2m-1=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -3$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m-3)^2 - 4m(2m-1) > 0 \\ m(-3)^2 + (m-3)(-3) + 2m-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 7m^2 + 2m - 9 < 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ -9/7 < m < 1 \end{cases}$$

Ta có $mx_2^2 + (m-3)x_2 + 2m-1 = 0 \Leftrightarrow m(2+x_2+x_2^2) = 3x_2+1$

Do đó

$$21x_1 + 7m(2+x_2+x_2^2) = 58 \Leftrightarrow 21x_1 + 7(3x_2+1) = 58$$

$$\Leftrightarrow 21(x_1+x_2) = 51 \Leftrightarrow x_1+x_2 = \frac{17}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-m}{m} = \frac{17}{7} \Leftrightarrow 21-7m = 17m \Leftrightarrow m = \frac{7}{8}(n)$$

Vậy $m = \frac{7}{8}$

Bài 4.

a) Ta có $100 = \frac{x+y}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}{2} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = 400 \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} = 20$$

b) Khi x tăng a% thì được $\left(1+\frac{a}{100}\right)x$, y giảm m% thì được $\left(1-\frac{m}{100}\right)y$

Do x, y tỷ lệ nghịch nên ta có phương trình:

$$xy = \left(1+\frac{a}{100}\right)x \left(1-\frac{m}{100}\right)y$$

$$\Leftrightarrow 10000 = (100+a)(100-m)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{100a}{100+a}$$

Bài 5.

a) Gọi T là trung điểm của CD, tam giác CID vuông cân tại I nên T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CID.

Ta có BE và BC là hai tiếp tuyến của T nên BE = BC, mà BC = BA nên BE = BA hay tam giác ABE cân tại B.

Ta có $\angle DEC = 90^\circ$, suy ra DF \perp CE mà CE \perp BT (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau), suy ra DF \parallel BT mà BF \parallel DT nên BFDT là hình bình hành, suy ra BF = DT = a. Suy ra AF = a

b) Ta có PE, PD là tiếp tuyến của T nên PD = DE.

Khi đó BP = EB + EP = ED + BC.

Gọi K là trung điểm của BP, tam giác APB vuông nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP và bán kính đường tròn bằng $\frac{1}{2} PB$.

Tứ giác DPBC là hình thang vuông có KT là đường trung bình, suy ra $KT = \frac{1}{2} (DP + BC) = \frac{1}{2} PB$ và $KT \parallel PD$, suy ra $KT \perp CD$.

Do đó khoảng cách từ K đến CD bằng bán kính của (K) nên CD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác APB.

Ta có TP và TB là phân giác của $\angle ETD$ và $\angle ETC$ nên $\angle BTP$ vuông. Khi đó $EP \cdot EB = TE^2$, suy ra $EP = \frac{TE^2}{BE} = \frac{a^2}{2a} = \frac{1}{2} a$

$$= TE^2, \text{ suy ra } EP = \frac{TE^2}{BE} = \frac{a^2}{2a} = \frac{1}{2} a$$

Khi đó PD = PE = $\frac{1}{2} a$, suy ra PA = $\frac{3}{2} a$. Suy ra $\frac{AP}{DP} = 3$

c) Tứ giác AEIF có $\angle IEF = \angle DCI = 45^\circ = \angle IAF$, suy ra tứ giác AEIF nội tiếp, do đó $\angle IEA = \angle IFA = 90^\circ$ và EM là phân giác $\angle CED$. Khi đó IM là đường kính và M là điểm chính giữa cung CD của T. Suy ra $\angle ICM = 90^\circ$, $CM = CI = a\sqrt{2}$

Khi đó $AM^2 = AC^2 + CM^2 = 8a^2 + 2a^2 = 10a^2 \Rightarrow AM = a\sqrt{10}$

