ĐỀ TOÁN THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

NĂM HỌC 2014 – 2105

ĐỀ TOÁN CHUYÊN. THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I. Cho phương trình $\left(m^2+5\right)x^2-2mx-6m=0 \quad (1)$ với m là tham số.

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16$$

Câu II.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(1+x\sqrt{y}\right)^2=9y\sqrt{x} \\ 2\left(1+y\sqrt{x}\right)^2=9x\sqrt{y} \end{cases}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}\geq 3+2\sqrt{2}$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R (C ≠ A, C ≠ B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB tại M, N.

a) Chứng minh AN = AC, BM = BC.

b) Chứng minh 4 điểm M, N, I, J cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI và CH đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

a) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

Hướng dẫn giải.

Câu I.

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2+5\neq 0 \\ \Delta' = m^2+6m\left(m^2+5\right)>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow m\left(6m^2+m+30\right)>0$$
$$\Leftrightarrow m\left[5m^2+\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{119}{4}\right]>0$$
$$\Leftrightarrow m>0$$

Khi đó ta có $x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5}$

Vì $m^2+5-2m=\left(m-1\right)^2+4>0 \Rightarrow m^2+5>2m>0 \Rightarrow 0<\dfrac{2m}{m^2+5}<1$ nên tổng hai nghiệm của phương trình không thể là số nguyên.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m\geq 0$. Khi đó $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5} \\ x_1x_2=\dfrac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$

Ta có $\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2 \\ x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2 \Leftrightarrow \dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=2$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}$ ta có phương trình: $-3t^2-t-2=0\left(VN\right)$

Trường hợp 2: $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2 \Leftrightarrow \dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=-2$, đặt $t=\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}, t\geq 0$ ta có phương trình $-3t^2-t=-2 \Leftrightarrow 3t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{2}{3}$ ta có $\dfrac{2m}{m^2+5}=\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow 4m^2-18m+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \quad (n) \\ m=\dfrac{5}{2} \quad (n) \end{array}\right.$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=2, m=\dfrac{5}{2}$.

Câu II.

1) $\begin{cases} 2\left(1+x\sqrt{y}\right)^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2\left(1+y\sqrt{x}\right)^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases}$

Đặt $a = x\sqrt{y}, b = y\sqrt{x}$. Điều kiện $a,b \geq 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(1+a\right)^2 = 9b \quad (1) \\ 2\left(1+b^2\right) = 9a \quad (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta có: $\begin{aligned} & 2\left(1+a\right)^2 - 2\left(1+b\right)^2 = 9\left(b-a\right) \\ & \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(2a+2b+13\right) = 0 \\ & \left[\begin{array}{ll} a = b & (n) \\ 2a+2b = -13 & (l) \end{array}\right. \end{aligned}$

Với a = b, thế vào (1) ta có $2\left(1+a\right)^2 = 9a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \Rightarrow b = 2 \\ a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Khi $a = b = 2$ ta có $\begin{cases} x\sqrt{y} = 2 \\ y\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{4}$

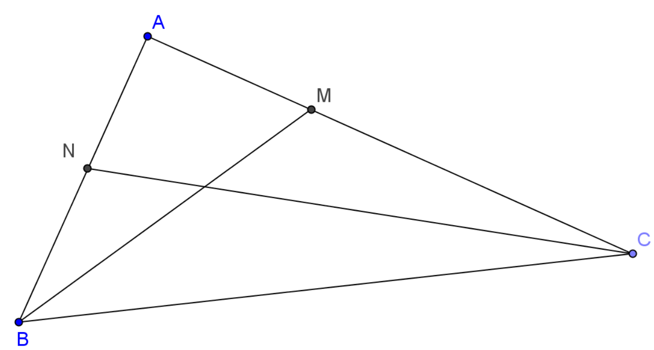
Khi $a = b = \dfrac{1}{2}$ ta có $\begin{cases} x\sqrt{y} = \dfrac{1}{2} \\ y\sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}\right),\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$

2)

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{MC+MA}{MA} = 1 + \frac{BC}{AB}$$
$$\frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BN+NA}{NA} = 1 + \frac{BC}{AC}$$



suy ra $\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}=\left(1+\frac{BC}{AB}\right)\left(1+\frac{BC}{AC}\right)=1+\frac{BC^2}{AB.AC}+\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}$

Ta có $BC^2=AB^2+AC^2\ge 2AB.AC\Rightarrow \frac{BC^2}{AB.AC}\ge 2$

Và $\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}\ge 2\sqrt{\frac{BC}{AB}.\frac{BC}{AC}}\ge 2\sqrt{2}$

Do đó $\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}\ge 3+2\sqrt{2}$

Câu III.

a) Từ đề bài ta có $c(a+b)=ab$, suy ra ab chia hết cho a + b.

Giả sử a + b nguyên tố. Ta có a < a + b, suy ra (a, a + b) = 1. Suy ra b chia hết cho a + b (vô lý vì 0 < b < a + b).

b) Giả sử a + c và b + c đều là số nguyên tố. Khi đó

$c(a+b)=ab\Leftrightarrow ca=ab-bc\Rightarrow ca+ab=2ab-bc\Rightarrow a(b+c)=b(2a-c)$

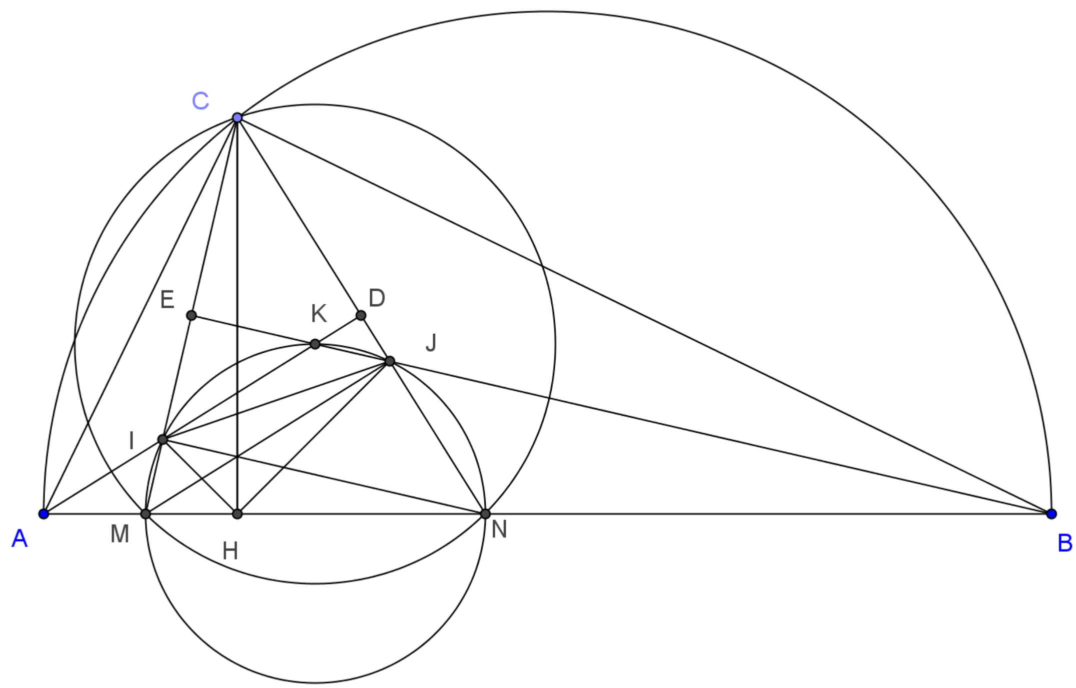
Và $b(a+c)=a(2b-c)$

Dễ thấy b + c nguyên tố và b + c > b nên b + c và b là nguyên tố cùng nhau; tương tự a+ c và a nguyên tố cùng nhau.

Mà $a(b+a)\vdots b\Rightarrow a\vdots b,\ b(a+c)\vdots a\Rightarrow b\vdots a$, suy ra a = b = 2c, suy ra a + c = b + c = 3c không là số nguyên tố vì c > 1.

Vậy khi c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



a) Ta có ∠HCB = ∠CAB (cùng phụ ∠ABC) và ∠HCA = ∠CBA (cùng phụ ∠CAB).

Ta có ∠CAN = ∠NAC + ∠ABC = ∠HAN + ∠ACB = ∠CAN. Suy ra tam giác CAN cân tại A, hay AN = AC. Chứng minh tương tự ta có BM = BC.

b) Tam giác CAN cân tại A có AI là phân giác nên cũng là trung trực, suy ra IC = IN, suy ra ∠INC = ∠ICN = ∠ICH + ∠NCH = ½ ∠ACH + 1/2 ∠BCH = 45^0.

Tương tự thì ∠JMC = 45^0.

Tứ giác MIJN có ∠JMC = ∠INC = 45^0 nên là tứ giác nội tiếp, hay M, N, I, J cùng thuộc một đường tròn.

Tam giác INC cân có ∠ICN = 45^0 nên ∠CIN = 90^0, suy ra CI ⊥ CM.

Chứng minh tương tự MJ ⊥ CN.

Tam giác CMN có CH, MJ và NI là các đường cao nên đồng quy.

c) Đặt $AC = b, BC = a.$ ta có $a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2$ a

$$AN = AC = b, BM = BC = a$$
$$AN + BN = BC + MN \Rightarrow MN = a + b - BC = a + b - 2R$$

Ta có

$$\left(a-b\right)^2 \ge 0 \Rightarrow 2ab \le a^2+b^2 \Rightarrow \left(a+b\right)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)=8R^2$$
$$\Rightarrow a+b \le 2\sqrt{2}R \Rightarrow a+b-2R \le 2R\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Đẳng thức xảy ra $a=b=R\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $2R\left(\sqrt{2}-1\right)$ khi C là điểm chính giữa đường tròn.

Khi đó $S_{CMN}=\frac{1}{2}CH.MN \le \frac{1}{2}R.2R\left(\sqrt{2}-1\right)=R^2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Đẳng thức xảy ta khi C là điểm chính giữa đường tròn.

Câu V.

a) Gọi 5 số đó là a, b, c, d, e. Do các số đều phân biệt nên ta có thể giả sử a < b < c < d < e.

Theo giả thiết ta có: a + b + c > d + e, suy ra $a+b+c \ge d+e+1$.

Suy ra $a \ge d+e+1-b-c$.

Mà b, c, d, e là tự nhiên nên từ:

$$d>c>b \Rightarrow d \ge c+1, c \ge b+1 \Rightarrow d \ge b+2 \Rightarrow d-b \ge 2$$
$$e>d>c \Rightarrow e \ge c+2 \Rightarrow e-c \ge 2$$

Do đó $a \ge \left(d-b\right)+\left(e-c\right)+1 \ge 5$, suy ra $b,c,d,e>5$.

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

b) Nếu $a \ge 6 \Rightarrow b \ge 7, c \ge 8, d \ge 9, e \ge 10 \Rightarrow a+b+c+d+e \ge 40$ (vô lý), suy ra a < 6. Theo câu a ta có $a=5$. Ta có $b+c+5 \ge d+e+1 \Rightarrow b+c \ge d+e-4$. Mà $d-2 \ge b, e-2 \ge 4 \Rightarrow d+e-4 \ge b+c$. Do đó

$$b=d-2, c=e-2$$
$$\Rightarrow a+b+c+d+e=5+2b+2c+4<40$$
$$\Rightarrow b+c<\frac{31}{2} \Rightarrow 2b+1<\frac{31}{2} \Rightarrow b \le 7$$

Từ đó ta có b = 6 hoặc b = 7.

Nếu b = 6, ta có d = 8, suy ra c = 7 và e = 9. Ta có bộ (5;6;7;8;9).

Nếu b = 7, ta có d = 9, suy ra c = 8 và e = 10. Ta có bộ (5;7;8;9;10).

Hết