ĐỀ THI VÀO CHUYÊN TOÁN PTNK NĂM 2015

Thời gian làm bài 150 phút

Bài 1(2,0 điểm). a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}=2\sqrt{x-x^2}$.

b) Cho các số a và b thỏa mãn điều kiện $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}$. Chứng minh rằng $-1 \leq a < 0$.

Bài 2 (2,0 điểm). a) Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ac+3=0$.

b) Cho m là số nguyên. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ac+4m=0$ thì cũng tồn tại các số nguyên a', b', c' sao cho $a'+b'+c'=0$ và $a'b'+b'c'+a'c'+m=0$.

c) Với k là số nguyên dương, chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ac+2^k=0$.

Bài 3 (1,0 điểm). Giả sử phương trình $2x^2+2ax+1-b=0$ có 2 nghiệm nguyên (a, b là tham số). Chứng minh rằng a^2-b^2+2 là số nguyên và không chia hết cho 3.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác $ABC(AB < AC)$ có các góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, F là điểm đối xứng của E qua M.

a) Chứng minh $EB^2 = EF.EO$.

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC. Chứng minh các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua một điểm cố định.

Bài 5 (2, 0 điểm). Để khuyến khích phong trào học tập, một trường THCS đã tổ chứng 8 đợt thi cho các học sinh. Ở mỗi đợt thi, có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải. Sau khi tổ chứng xong 8 đợt thi, người ta nhận thấy rằng với hai đợt thi bất kì thì có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả hai đợt thi đó. Chứng minh rằng:

a) Có ít nhất một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở 8 đợt thi.

Hết

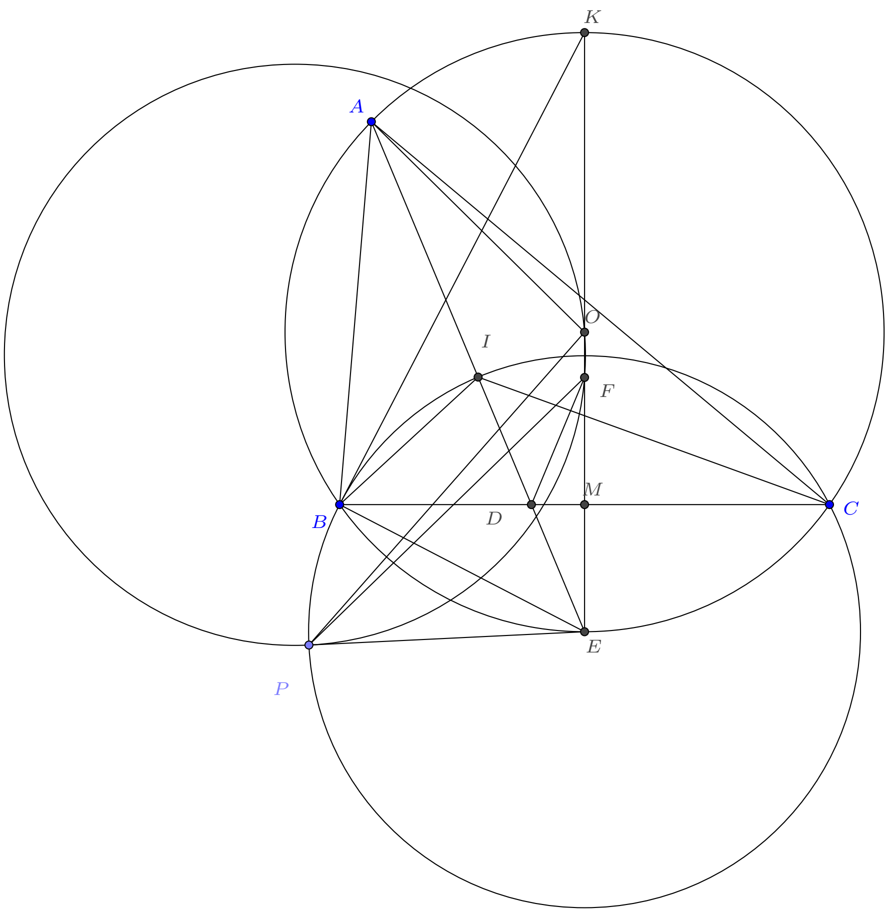
Hướng dẫn giải

Bài 1 a) Đặt $a=\sqrt{2x-1}, b=\sqrt{1-2x^2}$. Khi đó ta có $a+b=2\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow a=b$. Khi đó ta có $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x^2} \Leftrightarrow 2x-1\ge 0, 2x-1=1-2x^2$.
Giải ra được nghiệm $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
b) Ta có $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ và $x^2+xy+y^2\ge 0$ nên $x\ge y \Leftrightarrow\Leftrightarrow x^3\ge y^3$.
Đặt $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}$. Ta có $x+y=\sqrt[3]{y^3-\dfrac{1}{4}}$. Suy ra $x=\sqrt[3]{y^3-\dfrac{1}{4}}-y<0$.
Giả sử $x<-1$, ta có $\sqrt[3]{y^3-\dfrac{1}{4}}=y+x<y-1 \Leftrightarrow y^3-\dfrac{1}{4}<y^3-3y^2+3y-1 \Leftrightarrow y^2-y+\dfrac{1}{4}<0 \Leftrightarrow (y-\dfrac{1}{2})^2<0$ (vô lý).
Do đó $x\ge -1 \Leftrightarrow a\ge -1$.
Vậy $-1\le a<0$.
Bài 2 a) Từ $a+b+c=0, ab+bc+ca=-3$ ta có $a^2+b^2+c^2=6$. Do a,b,c vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $|a|\ge|b|\ge|c|$. Khi đó $1<|a|<3$. Suy ra $|a|=2$, suy ra $a=2$ hoặc $a=-2$.
Với $a=2$ thì $b+c=-2, b^2+c^2=2$ giải ra được $b=c=-1$.Ta có có bộ $(2;-1;-1)$ và các hoán vị.
Với $a=-2$ thì $b+c=2, b^2+c^2=2$, giải ra được $b=c=1$, ta có bộ $(-2;1;1)$ và hoán vị.
b) Ta có $a+b+c=0$ chẵn (1)và $ab+bc+ac=-4m$ chẵn.(2)
Nếu 3 số a,b,c đều lẻ, không thỏa (1).
Nếu có 1 chẵn, 2 lẻ thì không thỏa (2).
Do đó 3 số a,b,c đều chẵn. Khi đó đặt $a'=\dfrac{a}{2}, b'=\dfrac{b}{2}, c'=\dfrac{c}{2}$ thì a',b',c' thỏa đề bài.
c) Với $k=0$ ta có $a+b+c=0, ab+bc+ac=-1$ thì $a^2+b^2+c^2=2$ (3) . Không có bộ 3 số nguyên a,b,c khác 0 thỏa (3).
Với $k=1$ thì $a+b+c=0, ab+bc+ac=-2$ khi đó $a^2+b^2+c^2=4$ (4). Giả sử $|a|$ nhỏ nhất khi đó $1\le a^2<2$ (không có a thỏa). Không tồn tại a,b,c nguyên khác 0 thỏa (4).
Với $k>1$.
Nếu k chẵn, đặt $k=2n$ ta có $a+b+c=0, ab+bc+ac+4^n=0$, theo câu a), tồn tại a_1,b_1,c_1 nguyên thỏa $a_1+b_1+c_1=0, a_1b_1+a_1c_1+b_1c_1+4^{n-1}=0$.
Tương tự ta sẽ được a_n,b_n,c_n nguyên thỏa $a_n+b_n+c_n=0, a_nb_n+b_nc_n+a_nc_n=-1$ (vô nghiệm).
Nếu k lẻ đặt $k=2n+1$ ta có $a+b+c=0, ab+bc+ac+2.4^n=0$, làm tương

tự trên ta được $a_n + b_n + c_n = 0, a_nb_n + b_nc_n + a_nc_n = -2$ (vô nghiệm).
Vậy không tồn tại các số a, b, c khác 0 thỏa đề bài.

Bài 3 Theo định lý Viete ta có $x_1 + x_2 = -a, x_1x_2 = \dfrac{1-b}{2}$. Khi đó $Q = a^2 - b^2 + 2 = (x_1+x_2)^2 - (2x_1x_2 - 1)^2 + 2 = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2 + 1$ là một số nguyên.
Ta chứng minh Q không chia hết cho 3.
Ta có tính chất sau, với một số nguyên m bất kì thì nếu m chia hết cho 3 thì m^2 chia hết cho 3. Nếu m chia 3 dư 1 hoặc 2 thì m^2 chia 3 dư 1.
Ta có $Q = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2^2 + 1 - 3x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2$.
Ta cần chứng minh $Q' = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2^2 + 1$ không chia hết cho 3. Xét xác trường hợp sau:
TH1: Nếu x_1, x_2 không chia hết cho 3 thì x_1^2, x_2^2 chia 3 dư 1. Khi đó Q' chia 3 dư 2.
TH2: Nếu x_1 chia hết cho 3, x_2 không chia hết cho 3, khi đó Q' chia 3 dư 2.
TH3: x_1, x_2 chia hết cho 3. Khi đó Q' chia 3 dư 1.
Vậy Q' không chia hết cho 3.
Do đó Q không chia hết cho 3.

Bài 4



a) Ta có E là điểm chính giữa cung BC, suy ra $EB = EC$ và $OE \perp BC$ nên

M, O, E thẳng hàng.
Vẽ đường kính EK. Ta có $EM.EK = EB^2$.
Mặt khác $EF = 2EM, EO = \frac{1}{2}EK$. Do đó $EF.EO = EM.EK = EB^2$. (1)
b) Ta có $\angle EBC = \angle EAC = \angle EAB$. Suy ra $\Delta EAB \sim \Delta EBD$. Suy ra $EB^2 + ED.EA$ (2).
Từ (1) và (2) ta có: $EA.ED = EO.EFF$. Suy ra tứ giác $OFDA$ nội tiếp.
c) Ta có $\angle EIB = \angle EAB + \angle ABI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \angle EBC + \angle CBI = \angle EBI$, suy ra $EB = EI = EC$. Vậy E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Do đó $EP = EB$. Ta có $EP^2 = EB^2 = EO.EF$.
Suy ra $\Delta EPF \sim \angle EOP$. Suy ra $\angle EPF = \angle FOP$.
Hơn nữa, do O, F cùng phía đối với E nên PO, PF cùng phía đối với PE.
Vẽ tia tiếp tuyến $Px(PF, PO$ cùng phía đối với $Px)$của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF. Khi đó $\angle xPF = \angle FOP = \angle EPx$. Suy ra Px và PE trùng nhau. Vậy Px luôn qua điểm E cố định.
Bài 5 a) Giả sử A_1 là tập 3 bạn đạt giải trong đợt thi thứ nhất. Tương tự với $A_2, ..., A_8$.
Ta có $A_1 = \{a, b, c\}$. Vì $A_1 \cap A_i$, $i = \overline{2, 8}$ có đúng một học sinh nên các học sinh a, b, c xuất hiện trong 7 tập $A_2, ..., A_8$ và không có hai bàn nào xuất hiện cùng một tập. Do đó theo nguyên lí Đirichlet thì có 1 học sinh thuộc ít nhất 3 tập trong các tập $A_2, ..., A_8$. Khi đó học sinh này có xuất hiện trong ít nhất 4 tập, hay được nhận thưởng ít nhất 4 lần.
b) Theo câu a, có một học sinh a nhận thưởng được ít nhất 4 lần, giả sử là từ lần 1 đến lần 4. Hay a thuộc A_1, A_2, A_3, A_4. Khi đó nếu a không nhận thưởng trong 8 lần, tức là có một lần a không nhận thưởng. Giả sử là lần 8, tức là a không thuộc A_8.
Khi đó $A_1 \cap A_8$ là 1 học sinh nên có học sinh $b \neq a$ thuộc A_8, tương tự có học sinh c, d, e lần lượt thuộc A_2, A_3, A_4 cũng thuộc A_8. Hơn nữa b, c, d, e phải phân biệt. Do đó A_8 chứa ít nhất 4 phần tử. (vô lý). Vậy có một học sinh thuộc 8 tập, hay nhận thưởng 8 lần. Và không có hai học sinh nào cùng nhận thưởng hai lần nên chỉ có đúng một học sinh thỏa.

Hết

Bài giải chỉ mang tính tham khảo chứ không phải đáp án, nếu có sai sót xin góp ý để chỉnh sửa